Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού, Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**
Ημερομηνία: 6 Ιουνίου 2022

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α
Α1. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186*

Α2. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142*

Α3. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161*

Α4.
α. Σωστό
β. Σωστό
(Αν ήταν $f(0)=f(1)$ από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε x_0 με $f(x_0)=0$. Άτοπο)
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε: $D_f=(-\infty,1]$ με $f(x)=(x^2-1)^2$ και $D_g=[0,+\infty)$

Για να ορίζεται η $h=f\circ g$ πρέπει και αρκεί:
$\{x\in D_g$ και $g(x)\in D_f\}=\{x\geq 0$ και $\sqrt{x}\leq 1\}=[0,1]$

Άρα, $D_h=[0,1]$ και έχει τύπο:

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-1\right]^2=(x-1)^2, x\in[0,1]$$

Β2. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ και για κάθε $x\in(0,1)$ με $h'(x)=2(x-1)<0$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, επομένως "$1-1$" και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, έχουμε:

$h([0,1])=[h(1),h(0)]=[0,1]=D_{h^{-1}}$

Θέτουμε $y=h(x)\Leftrightarrow y=(x-1)^2$

Συνεπώς: $\sqrt{y}=|x-1|$ και επειδή $x\in[0,1]$, παίρνουμε:

$\sqrt{y} = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}, y \in [0,1]$

Άρα: $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

Β3. Είναι:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

i. Ελέγχουμε αν η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$:

Είναι συνεχής στο$[0,1)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων:

$\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$, επομένως η φ είναι συνεχής στο $x = 1$ και τελικά συνεχής στο $[0,1]$

Επίσης: $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$.

Επομένως, $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[0,1]$.

ii. Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, για κάθε αριθμό η μεταξύ του $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta$.

Για κάθε $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε: $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xLeftrightarrow{\eta\mu x \uparrow [0,\frac{\pi}{2}]} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$.

Συνεπώς, για $\eta = \eta\mu\alpha$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ έτσι ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < -1$ είναι: $f'(x) = -2$, επομένως υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) = -2x + c_1 \text{ για κάθε } x < -1.$$

Για $x > -1$ είναι: $f'(x) = 3x^2 - 1$, επομένως υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) = x^3 - x + c_2 \text{ για κάθε } x > -1.$$

Όμως: $O(0,0) \in C_f$. Άρα: $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x < -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x = -1$, άρα:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow 2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$
- $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$

Τελικά:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2.

i) Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι: $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, (1),
όπου $f(x_0) = x_0^3 - x_0$ και $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$, εφόσον $x_0 > -1$.
Οπότε: (1) $\Leftrightarrow y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$
Αφού $\Gamma(0, -2) \in C_f$ θα είναι:

$$-2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(-x_0)$$
$$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0$$
$$\Leftrightarrow 2x_0^3 = 2$$
$$\Leftrightarrow x_0 = 1, \text{αφού } x_0 > -1$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$y = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Σύντομα ακολουθούν οι απαντήσεις των υπόλοιπων ερωτημάτων.